$\mathbf{f(x) = a \cdot ln\,(bx + c) + d}$ • Birkenwachstum
Übung

Die Wachstumskurve einer neu gepflanzten Birke wird durch die Funktion

$$h(t) = 12 \cdot \ln\left(\frac{3}{5} \cdot t + 3\right) - 13$$

dargestellt. Die Funktion h gibt dabei die Höhe der Birke in Metern in Abhängigkeit von der Zeit $t \in [0; 50]$ in Jahren an. Nach den 50 Jahren ist das Höhenwachstum der Birke als abgeschlossen anzusehen. Runden Sie sinnvoll.

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Höhe der Birke beim Anpflanzen und am Ende seiner Wachstumsphase auf cm genau.

b) Zum Zeitpunkt t_1 erreicht der Baum eine Höhe von 13 m. Berechnen Sie t_1 in Monaten.

c) Die Ableitung $\frac{d}{dt}h(t) = \dot{h}(t)$ nach der Zeit t gibt die Wachstumsgeschwindigkeit des Baums an. Begründen Sie, dass die Funktion $h(t)$ streng monoton zunehmend ist und ermitteln Sie die Wachstumsgeschwindigkeit der Birke im Alter von 30 Jahren.

d) Berechnen Sie den Zeitpunkt t_2 der größten Wachstumsgeschwindigkeit der Birke.

e) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $h(t)$ in ein geeignetes Koordinatensystem.

© 2025 www.einfach-mathe-lernen.de

$\mathbf{f(x) = a \cdot \ln(bx + c) + d}$ • Birkenwachstum
Lösung

Es wird jeweils auf zwei Nachkommastellen gerundet.

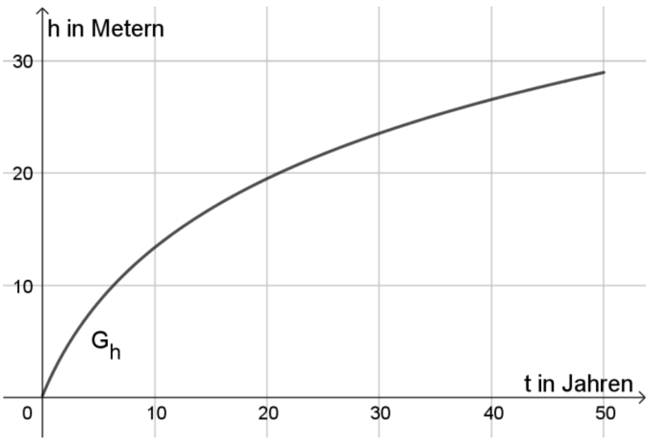
a) $h(0) = 12 \cdot \ln(3) - 13 \approx 0{,}18$
$h(50) = 12 \cdot \ln(33) - 13 \approx 28{,}96$

b) $t_1 = \frac{5}{3} \cdot e^{\frac{13}{6}} - 5 \approx 9{,}55$.
Das entspricht einer Zeit von 9 Jahren und 7 Monaten bzw. 115 Monaten.

c) $\dot{h}(t) = \frac{\frac{36}{5}}{\frac{3}{5}t+3}$ ist im gesamten Definitionsbereich positiv, also ist der Graph G_h streng monoton steigend.
$\dot{h}(30) = \frac{\frac{36}{5}}{\frac{3}{5} \cdot 30+3} = \frac{12}{35} \approx 0{,}34$ (Meter pro Jahr)

d) $\ddot{h}(t) = \frac{-\frac{108}{25}}{\left(\frac{3}{5}t+3\right)^2} < 0$, die Wachstumsgeschwindigkeit nimmt streng monoton ab.
Ihr Maximum muss bei $t_2 = 0$ liegen.

e)



© 2025 www.einfach-mathe-lernen.de